

Ausbildung – Vorbereitungskurse



Mathematik

Fachdossier Niveau II

Anforderungen im Fachbereich Mathematik für die Eintrittsprüfung Niveau II an die Pädagogische Hochschule Luzern (PHLU)

Lernziele

- o Einige wichtigen Begriffe, Ergebnisse und Methoden aus der Algebra, Geometrie, Stochastik und Analysis kennen
- o Die Formelsprache sowie wichtige Rechentechniken beherrschen
- o Problemlösestrategien kennen und anwenden
- o (Sach-)Probleme erfassen, mathematisieren und modellieren
- o Ergebnisse interpretieren und Methoden beurteilen
- o (Raum-)Geometrische Situationen vorstellen und darstellen können
- o (Technische) Hilfsmittel zweckmässig einsetzen

Inhalte

A. Als Grundlage dienen die Kenntnisse des Mathematikstoffes, der in der Volksschule bis Ende 9. Klasse im Niveau A der Sekundarstufe I behandelt wird; insbesondere folgende Themen:

Aus der Arithmetik

- o Grundbegriffe der Zahlentheorie (Primzahlen, grösster gemeinsamer Teiler, kleinste gemeinsame Vielfache usw.)
- o Grundoperationen mit natürlichen, ganzen und rationalen Zahlen; Potenzrechnen
- o Prozent- und Zinsrechnen
- o Direkte und indirekte Proportionalität
- o Termumformungen, binomische Formeln und Faktorzerlegung
- o Funktionsdarstellung in einem kartesischen Koordinatensystem

Aus der Geometrie

- o Wichtige geometrische Ortslinien (Kreis, Mittelsenkrechte, Winkelhalbierende, Mittelparallele)
- o Eigenschaften der Figuren Dreieck und Viereck mit allen Spezialfällen; deren Flächeninhalt
- o Satz von Pythagoras und Höhensatz
- o Umfang und Flächeninhalt eines Kreises
- o Ähnlichkeit und Strahlensätze

B. Für die Eintrittsprüfung werden Kenntnisse und Fähigkeiten in folgenden Stoffbereichen erwartet:

Aus der Algebra

- o Lineare Gleichungssysteme mit bis zu drei Variablen lösen und die Lösungsmethode beschreiben.
- o Quadratische Gleichungen lösen und quadratische Funktionen darstellen.
- o Die Rechenregeln für Potenzen und Wurzeln anwenden und Gleichungen mit entsprechenden Termen lösen.

Aus der Analysis

- o Den Funktionsbegriff verstehen und verschiedene Darstellungen kennen.
- o Die Definition der Ableitung verstehen und grafisch interpretieren.
- o Die Definition der Stammfunktion und ihre Anwendung bei Flächen- und Volumenberechnungen verstehen.
- o Die Ableitungsfunktion mit Hilfe der Ableitungsregeln (Summen-, Produkt, Quotienten- und Kettenregel) und Stammfunktionen von Funktionen bilden.
- o Vollständige Kurvendiskussion (Definitionsbereich, Symmetrie, Nullstellen, Extrema, Wendepunkte, Asymptoten, Graf) mit folgenden Funktionen durchführen: Polynomfunktionen, trigonometrischen Funktionen, Exponential- und Logarithmusfunktionen.
- o Mathematische Modellierung (anwendungsorientierter) Steckbriefaufgaben zu ganzrationalen Funktionen vornehmen.
- o Den Einfluss von Parametern untersuchen.
- o Die Ableitung zur Lösung von Extremalproblemen anwenden.
- o Folgen und Reihen als Instrument der Modellbildung erkennen und anwenden.

Aus der Geometrie

- o Die Eigenschaften von kongruenten und ähnlichen Figuren kennen und anwenden
- o Trigonometrische Funktionen am Einheitskreis erklären und anwenden
- o Trigonometrische Aufgaben in rechtwinkligen und nicht-rechtwinkligen Dreiecken lösen

Aus der Stochastik

- o Elementare Probleme der Wahrscheinlichkeitsrechnung lösen mit Hilfe von
 - o Ereignissen, universelle (disjunkte) Ereignisse, Gegenereignis, unabhängige Ereignisse
 - o Vereinigung und Schnitt von Ereignissen
 - o Laplace - Experimenten
 - o Bernoulli - Experimenten
 - o mehrstufigen Zufallsexperimenten
 - o der Formel für bedingte Wahrscheinlichkeit

Empfohlene Vorbereitung / Literatur

Folgende Bücher enthalten Abschnitte, die die oben erwähnten Inhalte abdecken:

- o **Fundamentum Mathematik und Physik**; Formeln, Begriffe, Tabellen, ...
Orell Füssli, 2011; ISBN 978-3-280-02744-8
- o **DUDEN Mathematik**, Basiswissen Schule 5. bis 10. Klasse
Buch und CD-Rom in Verbindung mit dem Internet paetec,
Berlin und Bibliographisches Institut, Mannheim, 2008; ISBN 978-3-411-71502-2
- o **DUDEN Mathematik**, Basiswissen Schule 11. Klasse bis Abitur
Buch und CD-Rom in Verbindung mit dem Internet paetec,
Berlin und Bibliographisches Institut, Mannheim, 2007; ISBN 978-3-411-71742-2
- o Deller, Gebauer, Zinn; **Algebra 1 und 2**
Orell Füssli, 2008/2009; ISBN 978-3-280-02795-0/ 978-3-280-02797-4
- o Bigalke/Köhler: **Mathematik Sekundarstufe II - Allgemeine Ausgabe: Band 1 - Analysis**: Schülerbuch
Cornelsen Verlag, 2010; ISBN 978-3-06-000478-2
- o Bigalke/Köhler: **Mathematik Sekundarstufe II - Allgemeine Ausgabe: Band 2 - Analytische Geometrie, Stochastik**: Schülerbuch
Cornelsen Verlag, 2010; ISBN 978-3-06-000479-9
- o **Wahrscheinlichkeitsrechnung und beschreibende Statistik**, Compendio Bildungsmedien Zürich,
ISBN 978-3-715-59352-4.
- o **Abi-Countdown Wahrscheinlichkeitsrechnung Leistungskurs**, Manz Verlag, Stuttgart, ISBN 978-3-78-633021-9

Prüfungsmodalitäten und Bewertungskriterien

Zeit 180 Minuten

Hilfsmittel TI-30, Formelsammlung (Fundamentum oder vergleichbar), eine A4-Seite Zusammenfassung¹ (diese Zusammenfassung wird zusammen mit der Prüfung abgegeben)

Beachten Sie

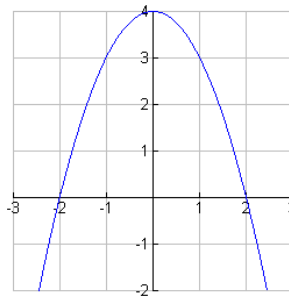
- der Lösungsweg ist genau zu dokumentieren.
- die Prüfung gilt als bestanden, wenn von den möglichen Punkten ca. 50% erreicht werden.
- Die Musterprüfung macht deutlich, dass nicht der Stoff aus der Volksschule, wie er unter A (siehe Seite 2) aufgeführt ist, sondern die zusätzlichen Kenntnisse und Fertigkeiten unter B (siehe Seite 3) geprüft werden.

¹ Das heisst, eine eigene, von Hand geschriebene Formelsammlung, welche mit Erweiterungen angereichert sein darf, die nicht in der Formelsammlung stehen, vorausgesetzt, dass keine gelösten Beispiele notiert werden.

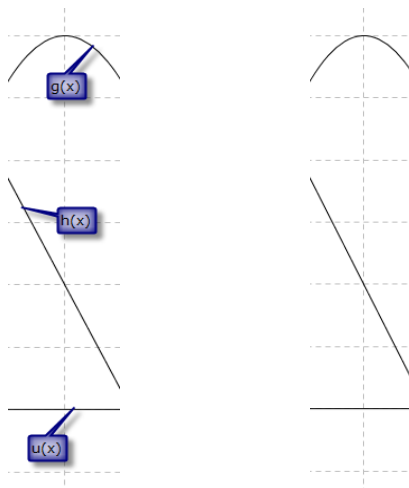
Musteraufgaben / Antworten

Aufgabe 1 – Analysis – Differentialrechnung

- a) [4 P] Der Graph einer **ganzrationalen Funktion vierten Grades** ist symmetrisch bezüglich der y-Achse, schneidet diese bei 2 und hat in $M(2/4)$ ein Maximum. Schreiben Sie nur die **Bedingungen** (z.B. $f'(3) = 2$, falls die Steigung an der Stelle $x = 3$ den Wert 2 hat) **und** das zugehörige **Gleichungssystem** auf. *Das Gleichungssystem muss nicht gelöst werden.*
- b) [4 P] Gegeben ist die **Funktionenschar** $f_t(x) = \frac{x^3}{3} - t^2x$ mit $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Bestimmen Sie die **Extrema** dieser Funktion in **Abhängigkeit von t**. Geben Sie in **Abhängigkeit von t** an, um was für ein Extrema (Hoch- oder Tiefpunkt) es sich handelt.
- c) [4 P] Gegeben ist die Funktion $f(x) = -x^2 + 4$. Dem Graphen dieser Funktion (siehe Abbildung unten) soll ein Rechteck mit möglichst **grossem Umfang einbeschrieben** werden, dessen eine Seite auf der **x-Achse** und eine auf der **y-Achse** liegt. Berechnen Sie Länge und Breite dieses Rechtecks.



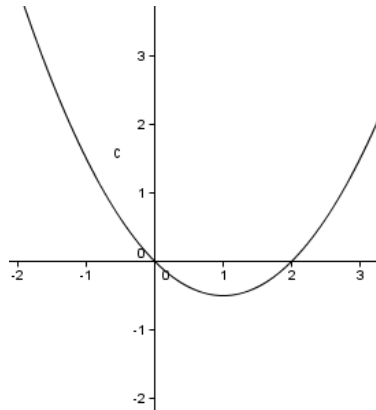
- d) [1.5 P] Unten abgebildet sehen Sie die Graphen einer Funktion $h(x)$, $g(x)$ und $u(x)$. Ordnen Sie der Abbildung rechts die Begriffe **$f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$** so zu, dass $f'(x)$ die Ableitung von $f(x)$ und $f''(x)$ die zweite Ableitung von $f(x)$ sein könnte und zeichnen Sie die x-Achse ein. **Begründen Sie** in je einem Satz Ihre Wahl für $f'(x)$ und $f''(x)$.



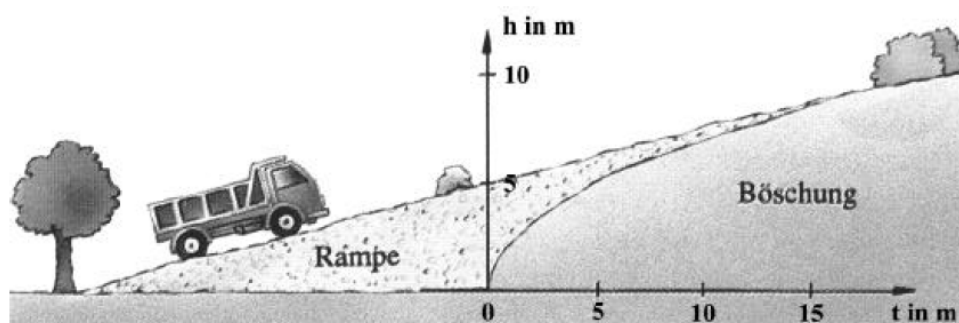
Aufgabe 2 – Analysis – Integralrechnung

- a) [4 P] Gegeben ist die Funktion $f_a(x) = ax^2 - x$ mit $a > 0$. Bestimmen Sie a so, dass der Flächeninhalt unter der Kurve und der x-Achse den Wert $\frac{8}{3}$ annimmt.

Unten abgebildet sehen Sie den Graphen der Funktion mit $a = 0.5$.

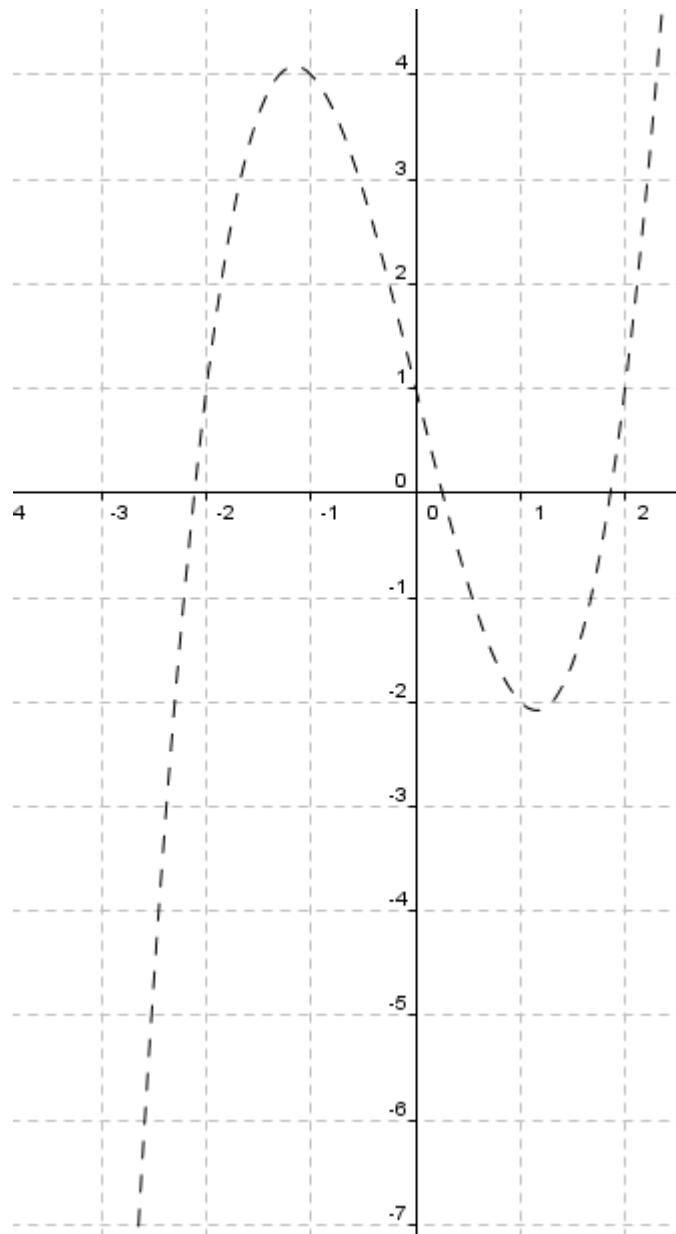


- b) [4 P] Das Profil der in der Abbildung gezeichneten Böschung wird durch eine Funktion mit dem Funktionsterm $h(t) = \sqrt{5t}$ beschrieben. Vom Punkt $P(20 / \dots)$ aus soll an die Böschung eine Rampe angeschüttet werden. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Rampe und schliesslich die Länge der Rampe.



c) Unten abgebildet sehen Sie den Graphen der ersten Ableitung f' . Nehmen Sie Stellung zu folgenden Behauptungen und begründen Sie.

- i. **[2 P]** Der Graph der Funktion f hat zwei Hochpunkte.
- ii. **[1 P]** Es gilt $f(0) = 1$.
- iii. **[2 P]** Der Graph der zweiten Ableitung nimmt im Intervall $[-2; 0]$ keine negativen Werte an.
- iv. **[2 P]** Der Graph von f besitzt im Intervall $[0; 2]$ eine Tangente, die parallel zur Geraden $y = 4x - 2$ verläuft.



- v. **[2 P]** Skizzieren Sie den Graphen von f'' und f mit $f(0) = -1$.

Aufgabe 3 – Wahrscheinlichkeitsrechnung

Felix behauptet stolz, er könne das Muster (Herz, Karo, Pik, Kreuz) der nächsten Karte in einem Kartenstapel vorhersagen. Trudi ist skeptisch und geht davon aus, dass Felix einfach rät.

- [2 P]** Trudi testet Felix und zieht **6 Karten**. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Felix **mindestens 5 Muster richtig** voraussagt, unter der Annahme, dass er einfach rät?
- [2 P]** Trudi testet Felix ein zweites Mal. Nun muss Felix **10 Karten** erraten. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass er **mindestens ein Muster nicht richtig** erkennt unter der Annahme, dass er keine übersinnlichen Fähigkeiten hat und einfach rät?
- [4 P]** Trudi testet Felix ein drittes Mal. Nun mit **zwei Karten**. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Felix **die zweite Karte richtig** beantwortet **unter der Bedingung**, dass **die erste schon richtig** war, wenn man wieder annimmt, dass Felix einfach rät?
- [3 P]** Trudi testet Felix ein viertes und letztes Mal mit 3 Karten. Felix weiss, dass sie eine Herz, eine Karo und eine Kreuzkarte hat. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass er mindestens zwei richtig errät, wenn die geratene Karte **nicht** zum Stapel zurückgelegt wird und er auch diesmal einfach rät?

Aufgabe 4 – Wahrscheinlichkeitsrechnung

In wenigen Tagen beginnt die Fussballweltmeisterschaft in Brasilien. Die Schweiz hat sich erfreulicherweise qualifiziert und spielt in der Gruppe E (siehe Abbildung rechts). In der Vorrunde spielt jede Mannschaft genau einmal gegen jede andere. Die Schweiz hat somit 3 Spiele in der Vorrunde. Ein Sieg ergibt drei Punkte, ein Unentschieden einen Punkt und eine Niederlage Null Punkte. Die Tabelle unten zeigt, wie gross die Wahrscheinlichkeiten für Sieg, Unentschieden und Niederlage gegen die jeweiligen Mannschaften ist.

GRUPPE E	
Team	P
 SUI	0
 ECU	0
 FRA	0
 HON	0

	Sieg	Unentschieden	Niederlage
<i>Schweiz – Honduras</i>	50%	20%	30%
<i>Schweiz – Frankreich</i>	30%	30%	40%
<i>Schweiz – Ecuador</i>	60%	20%	20%

- [2 P]** Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird die Schweiz in der Vorrunde mehr als 5 Punkte erzielen?
- [2 P]** Wir nehmen an, dass sich die Gewinnwahrscheinlichkeiten in obiger Tabelle nicht ändern. Wie gross ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass die Schweiz bei 8 Spielen gegen Frankreich mindestens zweimal gewinnt?

Aufgabe 5 – Wahrscheinlichkeitsrechnung

[2 P] Am Bahnhof Luzern gibt es viele Velos. 60% davon sind Herrenvelos, von denen 70% abgeschlossen sind. Bei den Damenvelos sind 85% abgeschlossen. Eine Person fährt mit einem Velo davon, ohne es zuvor aufgeschlossen zu haben. Mit welcher Wahrscheinlichkeit handelt es sich um ein Damenvelo, falls die Person das Velo zufällig ausgewählt hätte?

Aufgabe 6 – Folgen und Reihen

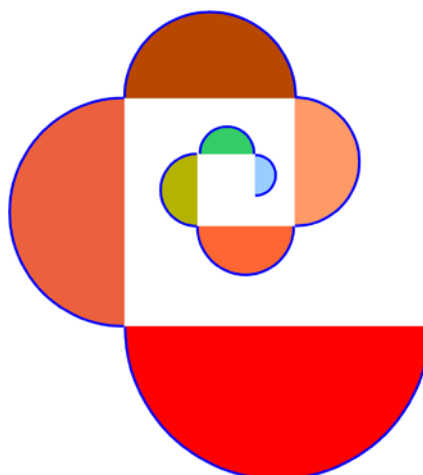
- a) **[2 P]** Der Mathematiker Carl Friedrich Gauss (1777 bis 1855) musste während seiner Schulzeit alle natürlichen Zahlen von 1 bis 100 addieren. Damals erhielt er die Summe 5050. Wie viele Zahlen hätte er addieren müssen, um auf die Summe 9730 zu kommen?

- b) **[2 P]** Peter baut in seinem Spielzimmer einen Turm aus Würfeln, als seine ältere Schwester ins Zimmer kommt. Der unterste Würfel hat eine Seitenlänge von 12 cm, der dritte von unten eine Seitenlänge von 8 cm. Die Schwester hat auch die anderen Würfel vermessen.

Berechnen Sie die Höhe des Turms bestehend aus 5 Würfeln, wenn die Schwester herausgefunden hat, dass die Längen der Würfelkanten eine geometrische Folge bilden?



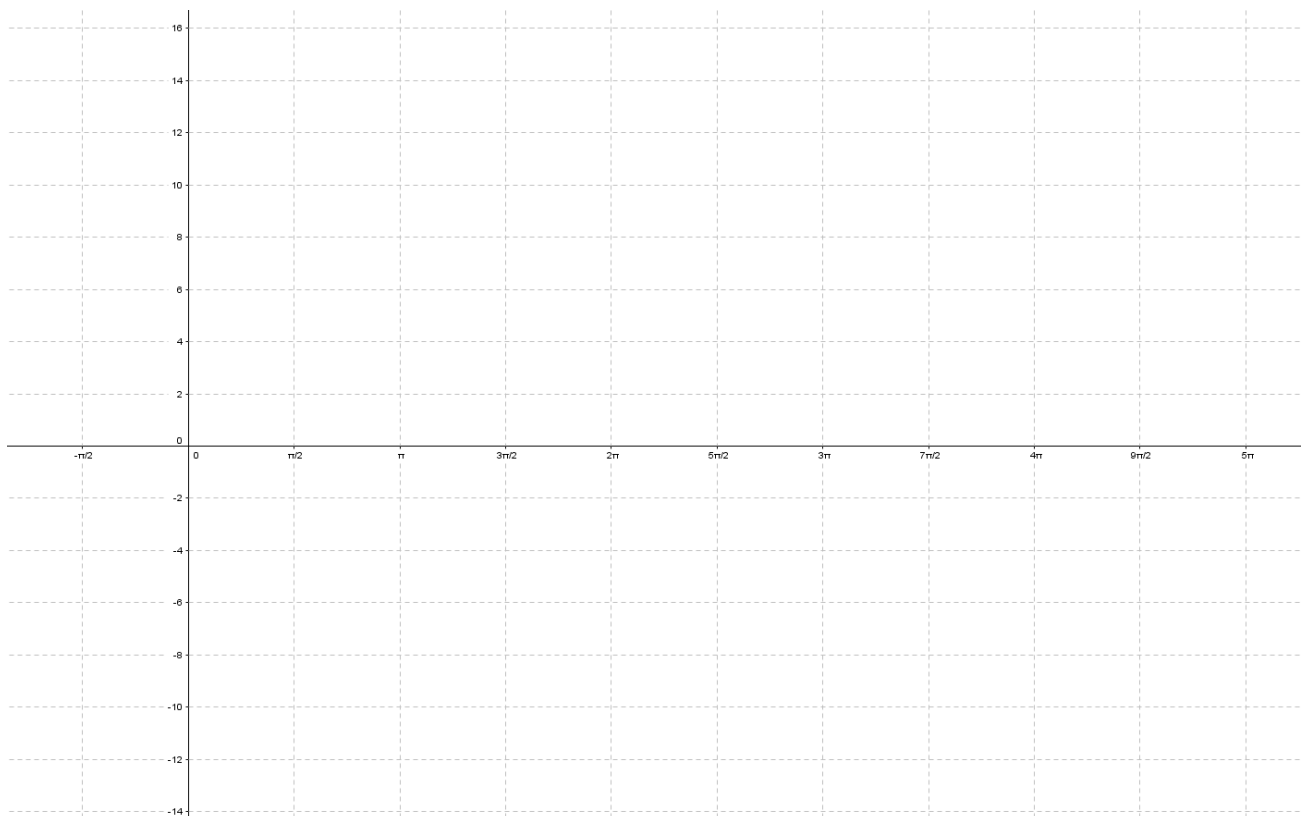
- c) **[2 P]** Halbkreise sollen in der nachstehenden Art zu einer Spirale zusammengesetzt werden (siehe Abbildung unten). Das Ganze ergibt ein Graffiti am Haus eines Mathematikers. Der erste Halbkreis hat einen Radius von 1 m, der Radius jedes folgenden Kreises beträgt 80 % des vorangehenden. Der kleinste Kreis, den Maler Pinsel auf der Hausmauer noch malen kann, hat einen Radius von 5 cm. Wie viele Kreise muss er malen, und welche Fläche bedecken all die Halbkreise insgesamt?



Aufgabe 7 – harmonische Schwingung

An der Lozärner Mäas steht ein Riesenrad deren Kabinen sich auf einem Kreis mit dem Durchmesser von 28 Metern bewegen. Es dauert 2π Minuten, bis es einmal ganz rundherum gefahren ist. Zum Zeitpunkt $t = 0$ Minuten befindet sich Peter exakt auf derselben Höhe wie der Mittelpunkt des Riesenrades und gewinnt an Höhe. Die Höhe $h(t)$ bezeichne die Höhe der Gondel von Peter über dem Mittelpunkt des Riesenrades zum Zeitpunkt t Minuten.

- a) **[2 P]** Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $h(t)$ in das untenstehende Koordinatensystem.
- b) **[3 P]** Das KKL in Luzern hat eine Höhe von 21 Metern. Wie lange kann die Aussicht auf das Dach des KKL's bei einer Umdrehung genossen werden? Markieren Sie diese Lösung in Ihrer Skizze.
- c) **[2 P]** Neben dem grossen Riesenrad steht noch ein kleineres mit dem Durchmesser 10 Meter. Dieses benötigt für eine Umdrehung 4π Minuten. Zum Zeitpunkt $t = 0$ Minuten befindet sich Klara ebenfalls gerade auf der Höhe des Mittelpunktes, wobei sie an Höhe verliert. Bestimmen Sie graphisch, wie oft sich Peter und Klara in den ersten 10 Minuten genau auf derselben Höhe befinden.



Aufgabe 8 – Trigonometrie

[2 P] Luzern hat die geographische Breite 47° . Mit welcher Geschwindigkeit dreht sich Luzern um die eigene Achse? Der Radius der Erde beträgt $R = 6370$ km.

Lösungen

Aufgabe 1a

Ansatz $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$

Bedingungen $f(0) = 2$

$$f(2) = 4$$

$$f'(2) = 0$$

Gleichungen $c = 2$

$$16a + 4b + c = 4$$

$$32a + 4b = 0$$

Aufgabe 1b

$$f_t(x) = \frac{1}{3}x^3 - t^2x$$

$$f'_t(x) = x^2 - t^2$$

$$f''_t(x) = 2x$$

Extrema notwendige Bedingung $f'_t(x) = 0$

$$x^2 - t^2 = 0$$

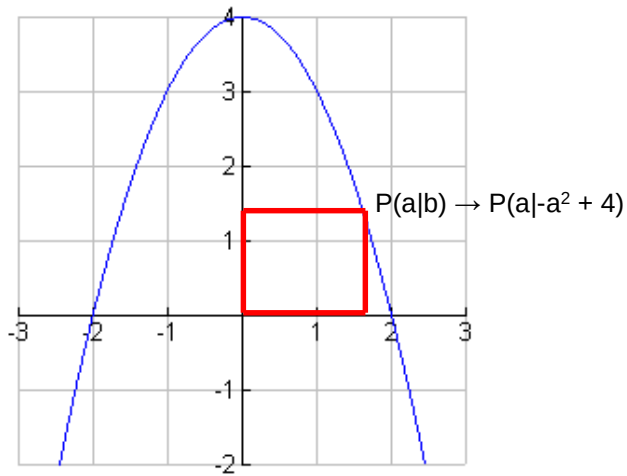
$$x = \pm t$$

hinreichende Bedingung $f''_t(t) = 2t$ > 0 , falls $t > 0 \rightarrow$ Minimum

$$< 0, \text{ falls } t < 0 \rightarrow \text{Maximum}$$

$$f''_t(-t) = -2t > 0, \text{ falls } t < 0 \rightarrow \text{Minimum}$$

$$< 0, \text{ falls } t > 0 \rightarrow \text{Maximum}$$

Aufgabe 1c

Zielfunktion

$$\begin{aligned} U(a) &= 2a + 2(-a^2 + 4) \\ &= -2a^2 + 2a + 8 \end{aligned}$$

Optimierung

$$\begin{aligned} U'(a) &= -4a + 2 = 0 \\ 4a &= 2 \\ a &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

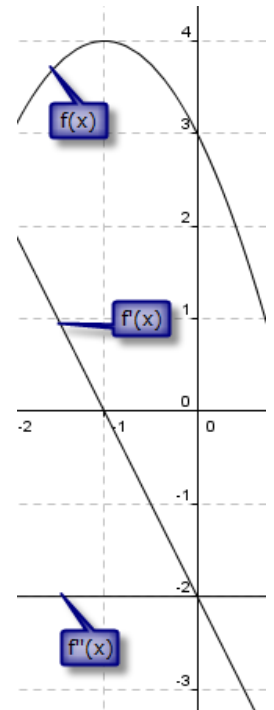
Überprüfen

$$\begin{aligned} U''(a) &= -4 \rightarrow \text{Maximum unabhängig von } a \\ a &= \frac{1}{2}; b = f\left(\frac{1}{2}\right) = 3.75 \rightarrow P(0.5/3.75) \end{aligned}$$

Aufgabe 1d

Links vom Hochpunkt hat der Graph der Funktion $f(x)$ eine positive Steigung $\rightarrow f'(x) > 0$,
beim Hochpunkt die Steigung $0 \rightarrow f'(x) = 0$ und rechts davon negativ $\rightarrow f'(x) < 0$.

Die Steigung des Graphen von $f''(x)$ ist negativ ($m = -2$) $\rightarrow$ Graph von $f''(x)$ ist eine
horizontale Gerade.



Aufgabe 2a

Nullstellen $f(x) = 0$

$$ax^2 - x = 0$$

$$x(ax - 1) = 0$$

$$\rightarrow x_1 = 0; x_2 = \frac{1}{a} \text{ (positiv)}$$

$$\int_0^{\frac{1}{a}} (ax^2 - x) dx = -\frac{8}{3}$$

$$\left[\frac{1}{3} ax^3 - \frac{1}{2} x^2 \right]_0^{\frac{1}{a}} = -\frac{8}{3}$$

$$\frac{1}{3} a \left(\frac{1}{a} \right)^3 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} \right)^2 = -\frac{8}{3}$$

$$\frac{1}{3a^2} - \frac{1}{2a^2} = -\frac{8}{3}$$

$$\frac{-1}{6a^2} = -\frac{8}{3}$$

$$3 = 48a^2$$

$$a^2 = \frac{1}{16}$$

$$a = \pm \frac{1}{4}$$

Da $a > 0$ sein muss, gilt $a = \frac{1}{4}$.

Aufgabe 2b

Wegen $h(20) = 10$ endet die Rampe im Punkte $P(20/10)$.

Aus der Ableitung $h'(t) = \frac{5}{2\sqrt{5t}}$ ergibt sich die Steigung $\frac{1}{4}$.

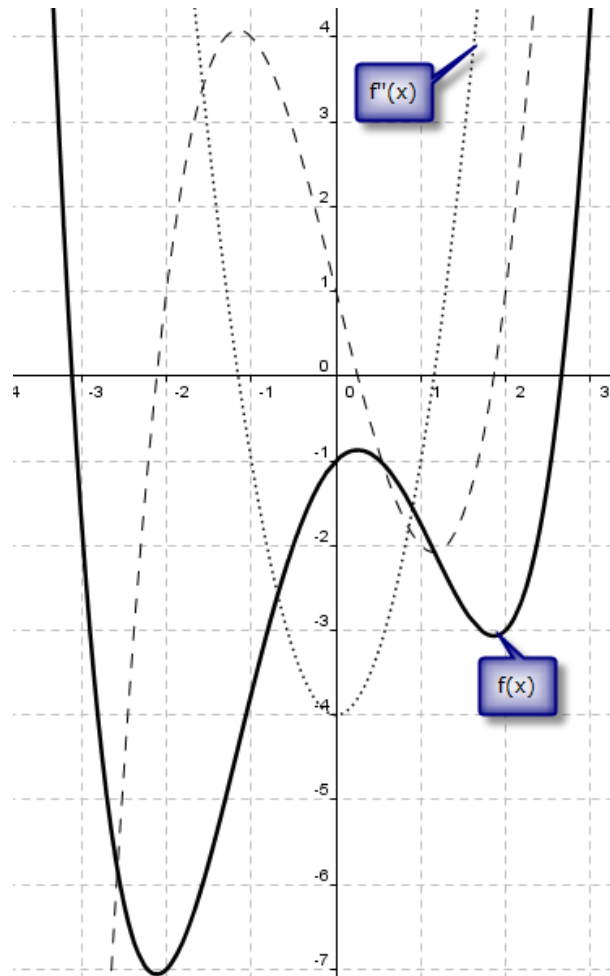
Die Funktionsgleichung der Tangente lautet dann $y = \frac{1}{4}x + 5$.

Die schliesslich zu lösende Gleichung $h(t) = 0$ (Schnittpunkt mit der t-Achse) hat die Lösungsmenge $L = \{-20\}$.

Nach dem Satz von Pythagoras ergibt sich daraus die Länge $10\sqrt{17}$.

Aufgabe 2c

- i. Falsch. Es gibt nur einen x -Wert mit $f'(x) = 0$ und $f''(x) < 0$.
- ii. Dies ist nicht entscheidbar. Wäre möglich, muss aber nicht sein.
- iii. Falsch. Es gilt z.B. $f''(-0.5) < 0$.
- iv. Falsch. Es gibt keinen x -Wert in diesem Intervall bei welchem die Funktion f' den Wert 4 annimmt.
- v.



Aufgabe 3a

Bernoulli mit $p = \frac{1}{4}$, $n = 6$ und $k = 5$ und 6

$$\rightarrow P(\text{mindestens 5 richtig}) = \binom{6}{5} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^1 + \binom{6}{6} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^6 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^0 = 0.004639$$

Aufgabe 3b

$P(\text{mindestens 1 Muster nicht richtig})$

$$= 1 - P(\text{kein Muster nicht richtig})$$

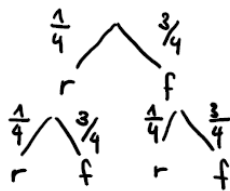
$$= 1 - P(\text{alle Muster richtig})$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{10}$$

$$= 0.999999$$

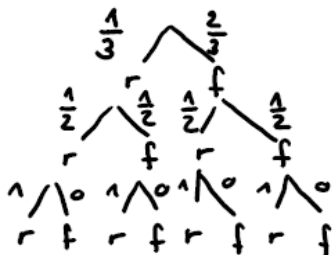
Aufgabe 3c

Bedingte Wahrscheinlichkeit



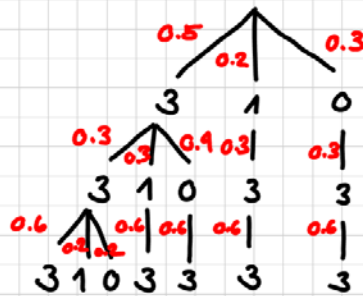
$$P(2. \text{ Karte richtig} | 1. \text{ Karte richtig}) = \frac{P(2. \text{ Karte richtig} \cap 1. \text{ Karte richtig})}{P(1. \text{ Karte richtig})} = \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}}{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}} = \frac{1}{4}$$

Aufgabe 3d



$$P(\text{mindestens 2 Richtige}) = P(2 \text{ Richtige}) + P(3 \text{ Richtige}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

Aufgabe 4a



Schweiz - Honduras

Schweiz - Frankreich

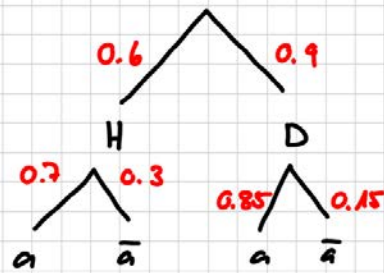
Schweiz - Ecuador

$$\begin{aligned}
 P(\text{mehr als 5 Punkte}) &= 0.5 \cdot 0.3 \cdot 0.6 + 0.5 \cdot 0.3 \cdot 0.2 + 0.5 \cdot 0.3 \cdot 0.4 + \\
 &\quad + 0.5 \cdot 0.3 \cdot 0.6 + 0.5 \cdot 0.4 \cdot 0.6 + 0.2 \cdot 0.3 \cdot 0.6 + \\
 &\quad + 0.2 \cdot 0.3 \cdot 0.6 = \underline{0.45}
 \end{aligned}$$

Aufgabe 4b

$$\begin{aligned}
 P(\text{mind. zweimal gewinnen}) &= 1 - P(\text{nie gewinnen}) - P(1 \times \text{gewinnen}) = \\
 &= 1 - \binom{8}{0} \cdot 0.3^0 \cdot 0.7^8 - \binom{8}{1} \cdot 0.3^1 \cdot 0.7^7 = 0.7947 \approx \underline{79.5\%}
 \end{aligned}$$

Aufgabe 5



$$\begin{aligned} \underline{\underline{P(D|\bar{a})}} &= \frac{P(D \cap \bar{a})}{P(\bar{a})} = \\ &= \frac{0.9 \cdot 0.15}{0.6 \cdot 0.3 + 0.9 \cdot 0.15} = \underline{\underline{0.25}} \end{aligned}$$

Aufgabe 6a

$$1 + 2 + 3 + \dots + a_n = 9730$$

$$a_1 = 1$$

$$d = 1$$

$$s_n = 9730$$

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

$$s_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n) \quad ; \quad s_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_1 + (n-1)d)$$

$$9730 = \frac{n}{2} (1 + 1 + (n-1) \cdot 1) = \frac{n}{2} (1+n) \cdot 2$$

$$19460 = n + n^2$$

$$0 = n^2 + n - 19460$$

$$n_1 = -140$$

$$n_2 = 139 \quad \rightarrow \underline{\underline{139 \text{ Zahlen}}}$$

Aufgabe 6b

$$a_1 = 12 \text{ cm} \quad \cdot q^2$$

$$a_3 = 8 \text{ cm}$$

$$q = \sqrt{\frac{8}{12}} \approx 0.8165$$

$$\underline{s_5} = a_1 \cdot \frac{1-q^5}{1-q} = 12 \cdot \frac{1-0.8165^5}{1-0.8165} \approx \underline{\underline{41.66 \text{ cm}}}$$

Aufgabe 6c

$$a_n = 0.05 \text{ cm} = a_1 \cdot q^{n-1}$$

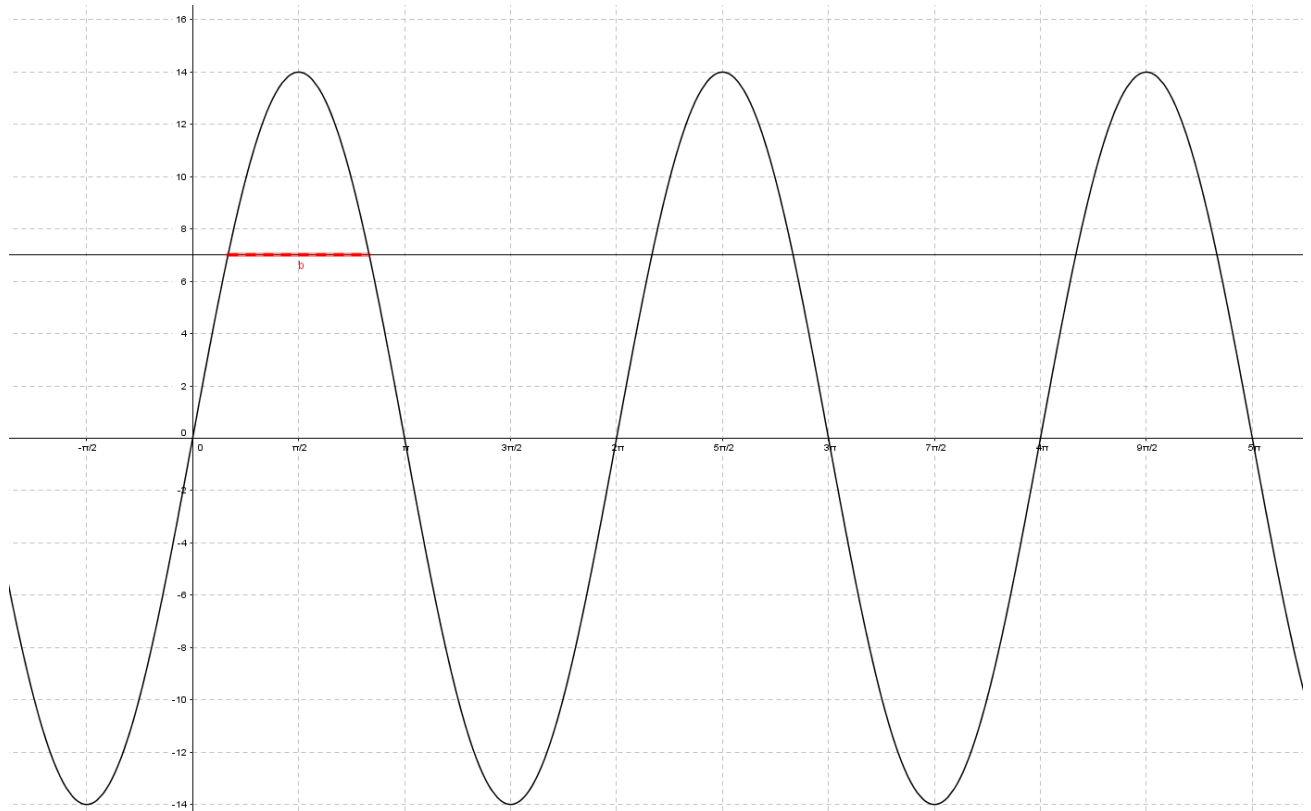
$$n = \frac{\ln\left(\frac{a_n}{a_1}\right)}{\ln(q)} + 1 = 19.4 \quad \Rightarrow \underline{\underline{19 \text{ Krise}}}$$

$$A_1 = a_1^2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{2}$$

$$A_2 = (a_1 \cdot q)^2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{2} = a_1^2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{2} \cdot q^2$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{s_{19}}} = 1^2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1-0.64^{19}}{1-0.64} = 1.386 \pi \text{ m}^2 = \underline{\underline{4.355 \text{ m}^2}}$$

Aufgabe 7a



Aufgabe 7b

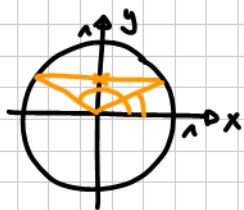
$$h(t) = 14 \cdot \sin(x)$$

$$7 = 14 \cdot \sin(x)$$

$$\frac{1}{2} = \sin(x)$$

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

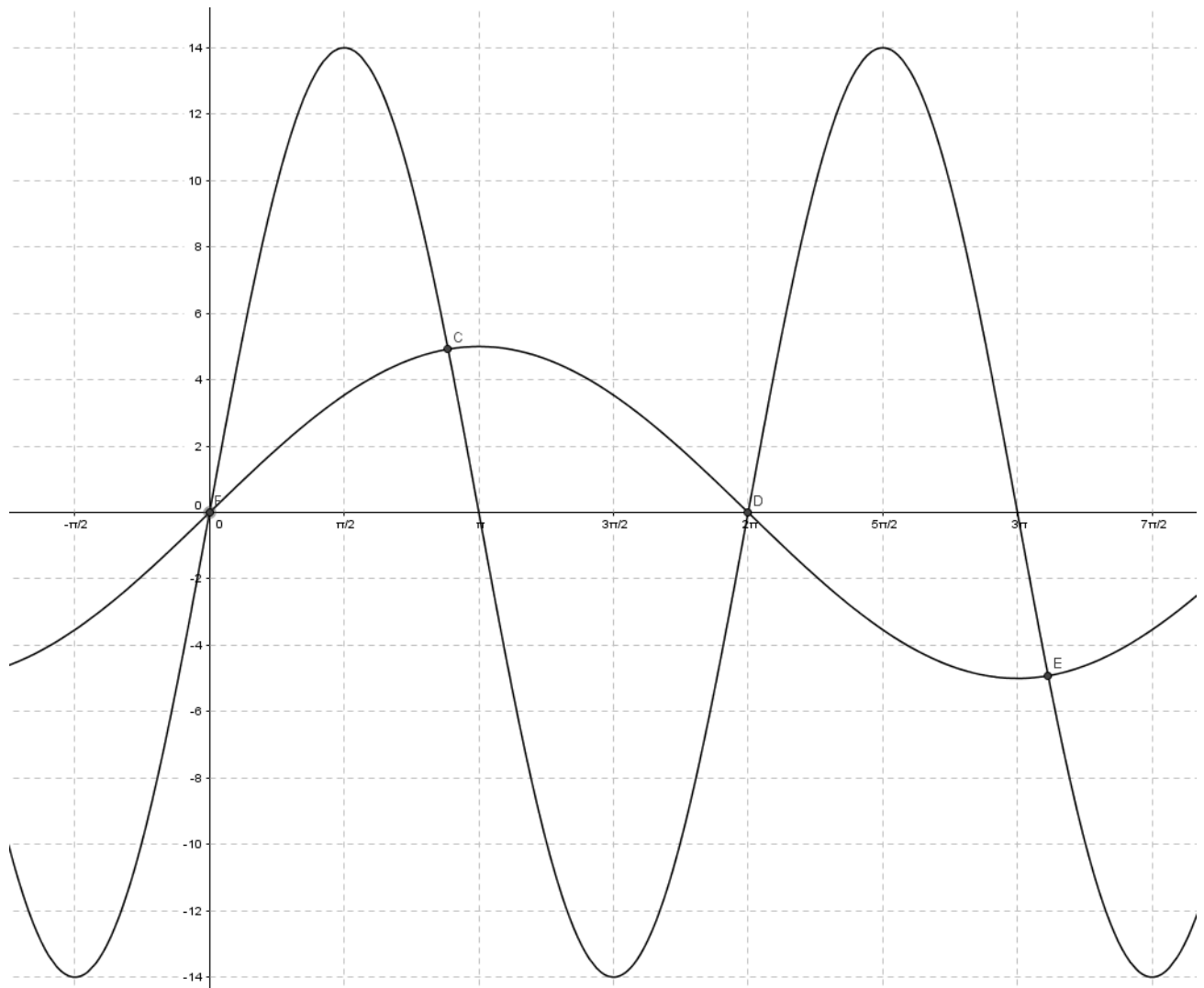
$$x_2 = \pi - \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi$$



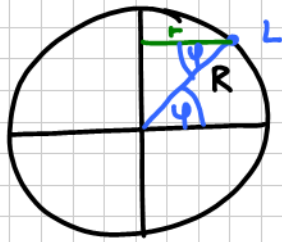
$$\underline{\underline{b}} = x_2 - x_1 = \pi - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{4\pi}{6} = \underline{\underline{\frac{2\pi}{3} \text{ min}}}$$

Aufgabe 7c

4mal inklusive Start



Aufgabe 8



$$\cos(\varphi) = \frac{r}{R} \quad ; \quad r = R \cdot \cos(\varphi) =$$

$$= 6370 \cdot \cos(47^\circ) \approx$$

$$\approx 4344,3 \text{ km}$$

$$u = 2\pi r = 2 \cdot \pi \cdot 4344,3 \approx 27'296,2 \text{ km}$$

$$\underline{\underline{v}} = \frac{u}{t} = \frac{27'296,2 \text{ km}}{24\text{h}} \approx \underline{\underline{1137,3 \text{ km/h}}} \quad (!)$$

August 2015
Michel Hauswirth

www.phlu.ch